UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/2
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 3 – 30 de novembro de 2015 – 08h30

1	2	3	4	5	081

Nome	Cartão	Turma	Chamada

0811 1. Considere uma infinidade de círculos C_k de área A_k, com $k \geqslant 1$. Obtenha, caso exista, a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ sabendo que o raio do círculo C_k é dado por $\dfrac{1}{2^k}$.

2. Sabe-se que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, r^k = \frac{r}{(1-r)^2}$, se $|r|<1$. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\, k}{6^{k+1}}$.

0812 Determine se a série numérica dada converge ou diverge. Justifique sua resposta, indicando o teste adequado. No caso de utilizar o TCL, basta identificar a série p utilizada e respectivo comportamento.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4+100k}}{k^2+k}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sqrt[3]{k}}{k^2+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{3+4k}{3k+4}$

0813 1. Obtenha o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k\, x^{2k}}{(k+1)!}$.

2. Sabe-se que uma certa série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-3)^k$ tem raio de convergência $R=3$.
O que pode ser afirmado sobre o comportamento da série numérica

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, 4^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, c_k$

0814 Defina $f(x)=x^3\,\mathrm{sen}(\frac{x^2}{2})$ com qualquer x, lembrando que $\mathrm{sen}\, x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$ com qualquer x.

1. Obtenha o 13º polinômio de Maclaurin de $f(x)$.
2. Obtenha a derivada $f^{(25)}(0)$ da função $f(x)$ na origem.
3. Obtenha a série de Maclaurin de $f'(x)$, a função derivada de $f(x)$.

0815 Considere a função $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\, 2^k}\,(x-1)^{2k+3}$, com $|x-1|<\sqrt{2}$.

1. Obtenha a série de Taylor de $\displaystyle\int f(x)\,dx$ em torno de $x=1$.
2. Escreva $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ como a soma de uma série numérica alternada e verifique que essa série satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada.
3. Obtenha a soma parcial da série numérica do item 2. com o menor número de parcelas que aproxima a integral I com erro menor do que 5×10^{-4}

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/2
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 3 – 30 de novembro de 2015 – 10h30

1	2	3	4	5	101

Nome	Cartão	Turma	Chamada

1011 1. Considere uma infinidade de triângulos equiláteros T_k de área A_k, com $k \geqslant 1$. Obtenha, caso exista, a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ sabendo que a aresta de T_k é dada por $\dfrac{1}{3^k}$. (Lembre que um triângulo equilátero de lado a tem área $\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$.)

2. Determine se a série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{6^{k-1}}$ converge e, se convergir, encontre sua soma.

1012 Determine se a série numérica dada converge ou diverge. Justifique sua resposta, indicando o teste adequado. No caso de utilizar o TCL, basta identificar a série p utilizada e respectivo comportamento.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k(k^2+5)}{5+8k^2}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+2)(k^2+4)}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k}{\sqrt{6k(k^3+1)}}$

1013 1. Obtenha o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{8^k}\,(x+3)^{3k}$.

2. Suponha que a série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-3)^k$ tenha um raio de convergência R que satisfaz $3 \leqslant R \leqslant 4$. O que pode ser afirmado sobre o comportamento da série numérica

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\, c_k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, 5^k\, c_k$

1014 Defina $f(x) = x^3 \cos(\frac{x^2}{2})$ com qualquer x, lembrando que $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}$ com qualquer x.

1. Obtenha o 11º polinômio de Maclaurin de $f(x)$.
2. Obtenha a derivada $f^{(23)}(0)$ da função $f(x)$ na origem.
3. Obtenha a série de Maclaurin de $f'(x)$, a função derivada de $f(x)$.

1015 Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k!\,3^k}\,(x-2)^{3k+2}$, com qualquer x.

1. Obtenha a série de Taylor de $\displaystyle\int f(x)\,dx$ em torno de $x = 2$.
2. Escreva $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$ como a soma de uma série numérica alternada e verifique que essa série satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada.
3. Obtenha a soma parcial da série numérica do item 2. com o menor número de parcelas que aproxima a integral I com erro menor do que 5×10^{-4}

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/2	1	2	3	4	5	131
Departamento de Matemática Pura e Aplicada **MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA** **PROVA 3 – 30 de novembro de 2015 – 13h30**						

Nome	**Cartão**	**Turma**	**Chamada**

1311 1. Considere uma infinidade de quadrados Q_k de área A_k, com $k \geqslant 1$. Obtenha, caso exista, a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ sabendo que o lado do quadrado Q_k é dado por $(3/4)^k$.

2. Sabe-se que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2\, r^k = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$, se $|r|<1$. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{3^k}$.

1312 Determine se a série numérica dada converge ou diverge. Justifique sua resposta, indicando o teste adequado. No caso de utilizar o TCL, basta identificar a série p utilizada e respectivo comportamento.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k(k^2+1)}}{k^3+2k}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{2k^3+3}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{2k+2}$

1313 1. Obtenha o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{9^k}(x-2)^{2k}$.

2. Sabe-se que uma certa série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x+2)^k$ converge se $x=0$ e diverge se $x=1$. O que pode ser afirmado sobre o comportamento da série numérica

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, 4^k\, c_k$

1314 Defina $f(x) = x^3 \ln(1+\frac{x^2}{2})$ com $|x|<\sqrt{2}$, lembrando que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ com $|x|<1$. Obtenha

1. o 11º polinômio de Maclaurin de $f(x)$;
2. a derivada $f^{(19)}(0)$ da função $f(x)$ na origem;
3. a série de Maclaurin de $f'(x)$, a função derivada de $f(x)$.

1315 Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(7k+5)}{k^2\,10^k}(x-5)^{7k+4}$, com $|x-5|<\sqrt[7]{10}$.

1. Obtenha a série de Taylor de $\displaystyle\int f(x)\,dx$ em torno de $x=5$.
2. Escreva $I = \displaystyle\int_5^6 f(x)\,dx$ como a soma de uma série numérica alternada e verifique que essa série satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada.
3. Obtenha a soma parcial da série numérica do item 2. com o menor número de parcelas que aproxima a integral I com erro menor do que 5×10^{-5}

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/2
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 3 – 30 de novembro de 2015 – 15h30

1	2	3	4	5	151

Nome	Cartão	Turma	Chamada

$\boxed{\mathbf{1511}}$ 1. Considere uma infinidade de triângulos T_k de área A_k, com $k \geqslant 1$. Obtenha, caso exista, a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ sabendo que a base de T_k é $\dfrac{1}{5^k}$ e a altura é 3^k.

2. Determine se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3k}\, 9^{1-k}$ converge e, se convergir, encontre sua soma.

$\boxed{\mathbf{1512}}$ Determine se a série numérica dada converge ou diverge. Justifique sua resposta, indicando o teste adequado. No caso de utilizar o TCL, basta identificar a série p utilizada e respectivo comportamento.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+3k}{4k+3}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sqrt{k+6}}{k^3+2k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2(k+1)}}{6k^2+7}$

$\boxed{\mathbf{1513}}$ 1. Obtenha o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)!}\,(x-2)^k$.

2. Sabe-se que uma certa série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x+3)^k$ tem raio de convergência $R = 3$. O que pode ser afirmado sobre o comportamento da série numérica

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, 4^k\, c_k$

$\boxed{\mathbf{1514}}$ Defina $f(x) = x^3 \operatorname{arctg}(\frac{x^2}{3})$ com $|x| < \sqrt{3}$, lembrando que $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}$ com $|x| < 1$. Obtenha

1. o 17º polinômio de Maclaurin de $f(x)$;
2. a derivada $f^{(25)}(0)$ da função $f(x)$ na origem;
3. a série de Maclaurin de $f'(x)$, a função derivada de $f(x)$.

$\boxed{\mathbf{1515}}$ Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(3k+6)}{(2k)!\,2^k}\,(x-4)^{3k+5}$, com qualquer x.

1. Obtenha a série de Taylor de $\displaystyle\int f(x)\,dx$ em torno de $x = 4$.
2. Escreva $I = \displaystyle\int_4^5 f(x)\,dx$ como a soma de uma série numérica alternada e verifique que essa série satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada.
3. Obtenha a soma parcial da série numérica do item 2. com o menor número de parcelas que aproxima a integral I com erro menor do que 5×10^{-4}

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/2
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 3 – 30 de novembro de 2015 – 18h30

1	2	3	4	5	181

Nome	Cartão	Turma	Chamada

1811 1. Considere uma infinidade de retângulos R_k de área A_k, com $k \geqslant 1$. Obtenha, caso exista, a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ sabendo que a base de R_k é $\dfrac{1}{5^k}$ e a altura é 3^k.

2. Determine se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$ converge e, se convergir, encontre sua soma.

1812 Determine se a série numérica dada converge ou diverge. Justifique sua resposta, indicando o teste adequado. No caso de utilizar o TCL, basta identificar a série p utilizada e respectivo comportamento.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{\sqrt{5k(k^2+1)}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2k+2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{3k^3+2}$

1813 Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3}(x-3)^{k+3}$. Obtenha o raio e o intervalo de convergência dessa série de potências, justificando o comportamento nas extremidades do intervalo.

1814 Lembre que $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, com qualquer x. Defina $f(x) = x^3\, e^{4x^2}$ e obtenha

1. o 9º polinômio de Maclaurin de $f(x)$;
2. a derivada $f^{(25)}(0)$ da função $f(x)$ na origem;
3. a série de Maclaurin de $f'(x)$, a função derivada de $f(x)$.

1815 Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+2)}{10^k\, k!}(x-9)^{k+1}$, com qualquer x.

1. Obtenha a série de Taylor de $\displaystyle\int f(x)\,dx$ em torno de $x = 9$.
2. Escreva $I = \displaystyle\int_9^{10} f(x)\,dx$ como a soma de uma série numérica alternada e verifique que essa série satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada.
3. Obtenha a soma parcial da série numérica do item 2. com o menor número de parcelas que aproxima a integral I com erro menor do que 5×10^{-6}